

Cultures microbiennes

Compléments Mathématiques

Jamila Sam

version 1.2 (Mars 2026)

© EPFL 2021–2026

Table des matières

1	Rappel du cadre du projet	2
2	Simulation du déplacement	2
3	Méthodes d'intégration numérique	2
3.1	Schéma d'Euler-Cromer	4
3.2	Runge-Kutta d'ordre 4	4

1 Rappel du cadre du projet

Ce projet a pour but de construire un outil informatique permettant de visualiser et simuler de façon simplifiée l'évolution de micro-organismes (bactéries) dans une boîte de culture. Pour plus de détails sur le cadre général du projet lui-même, référez-vous à la page Web de description de celui-ci.

Le présent document a pour seul but de vous fournir les compléments théoriques, notamment mathématiques, nécessaires à la mise en oeuvre du programme.

2 Simulation du déplacement

Nous considérons dans le cadre de ce projet que le mouvement d'une bactérie est régi par une équation de type :

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = f(\vec{v}(t), \vec{x}(t)) \quad (1)$$

où f est une force s'exerçant sur la bactérie et conditionnant son mouvement : par exemple une force d'attraction dépendant de la position, $\vec{x}(t)$, de l'bactérie et de sa vitesse, $\vec{v}(t)$, au moment t .

Calculer les vitesse et position de l'bactérie, conditionnés par f , après l'écoulement d'un certain temps, revient en fait à résoudre une équation différentielle du second ordre du type :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

où $x \in \mathbb{R}^q$ est un vecteur (position), $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (vitesse) et f est une fonction vectorielle de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$.

Nous le ferons moyennant un intégrateur numérique (voir la section 3 ci-dessous) qui nous permettra de calculer pas à pas l'évolution du mouvement d'une bactérie.

3 Méthodes d'intégration numérique

Peu d'équations différentielles possèdent une solution calculable analytiquement. Pour les résoudre, il faut alors passer par l'analyse numérique, c'est-à-dire le calcul approché, numérique, d'une solution particulière à l'équation différentielle pour des conditions initiales données. On parle d'« *intégration numérique* ».

Il existe de nombreux moyens d'intégrer numériquement une équation différentielle (cf plus loin). Le moyen le plus simple, dont nous allons nous servir ici pour illustrer les principes,

est la méthode dite « d'Euler ».

Imaginons que nous ayons une équation différentielle que l'on peut écrire sous la forme :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

où $x \in \mathbb{R}^q$ est un vecteur (typiquement la position), $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et f est une fonction vectorielle de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$ (qui en représente typiquement les équations du mouvement).

Imaginons également que nous connaissions des conditions initiales i.e. les valeurs $x(T_0)$ et $\dot{x}(T_0)$ de x et $\dot{x}$ au temps T_0 . On peut alors utiliser un développement limité au premier ordre pour trouver la valeur de x à un temps $t + \Delta t$:

$$x(T_0 + \Delta t) = x(T_0) + \dot{x}(T_0)\Delta t$$

Par le même raisonnement, on peut écrire pour la dérivée :

$$\begin{aligned}\dot{x}(T_0 + \Delta t) &= \dot{x}(T_0) + \ddot{x}(T_0)\Delta t \\ &= \dot{x}(T_0) + f(x(T_0), \dot{x}(T_0), T_0)\Delta t\end{aligned}$$

On peut alors, ainsi de suite, de proche en proche, déterminer de cette manière la valeur de x (**la position**) et $\dot{x}$ (**la vitesse**) pour tout temps t de la forme $T_0 + n\Delta t$. Il suffit pour cela de connaître les conditions initiales $x(0)$, $\dot{x}(0)$ et la fonction $f(x, \dot{x}, t)$ puis de faire une boucle sur les calculs précédents en avançant à chaque fois de Δt .

Il est ainsi par exemple possible de déterminer la position et la vitesse d'un système pour n'importe quel temps $T_0 + n\Delta t$ en utilisant l'intégrateur d'Euler, non pas en calculant directement la solution de l'équation, mais en faisant des « petits sauts » pour approcher cette solution.

La méthode passe par l'utilisation d'un « *pas de temps* » Δt . Il faut le choisir suffisamment petit pour que l'approximation faite dans le développement limité soit « raisonnable ». Ceci peut faire l'objet de nombreuses études qui seront le sujet de vos cours d'analyse numérique.

Dans notre cas, un choix de 0.03 secondes semble suffisant.

Dans ce projet, de façon générale on cherche donc à résoudre (numériquement) une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (x \in \mathbb{R}^q, q \text{ vaudra } 3 \text{ dans notre projet : monde 3D})$$

c'est-à-dire, partant de conditions initiales $(x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})$ au temps T_0 , calculer les valeurs $x^{(n)}$ et $\dot{x}^{(n)}$ de x et $\dot{x}$ au temps $T_n = T_0 + n\Delta t$ (pour un pas de temps Δt donné et $n \geq 1$).

Il existe pour cela plusieurs méthodes différentes. En voici deux, de la plus simple à la plus compliquée.

3.1 Schéma d'Euler-Cromer

Calculer $x^{(n)}$ et $\dot{x}^{(n)}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}^{(n)} &= \dot{x}^{(n-1)} + \Delta t \cdot f(T_{n-1}, x^{(n-1)}, \dot{x}^{(n-1)}) \\ x^{(n)} &= x^{(n-1)} + \Delta t \cdot \dot{x}^{(n)}\end{aligned}$$

À noter la différence avec le schéma d'Euler (explicite) classique qui utilise l'*ancienne* version $\dot{x}^{(n-1)}$ de la vitesse dans la seconde équation.

3.2 Runge-Kutta d'ordre 4

Cette méthode, plus fiable que la précédente, nécessite huit variables intermédiaires : k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k'_1 , k'_2 , k'_3 et k'_4 .

$$\begin{aligned}x^{(n)} &= x^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ \dot{x}^{(n)} &= \dot{x}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{6} (k'_1 + 2k'_2 + 2k'_3 + k'_4)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}k_1 &= \dot{x}^{(n-1)} \\ k'_1 &= f(T_{n-1}, x^{(n-1)}, \dot{x}^{(n-1)}) \\ k_2 &= \dot{x}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1 \\ k'_2 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, x^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_1, \dot{x}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_1) \\ k_3 &= \dot{x}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2 \\ k'_3 &= f(T_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, x^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k_2, \dot{x}^{(n-1)} + \frac{\Delta t}{2} k'_2) \\ k_4 &= \dot{x}^{(n-1)} + \Delta t k'_3 \\ k'_4 &= f(T_{n-1} + \Delta t, x^{(n-1)} + \Delta t k_3, \dot{x}^{(n-1)} + \Delta t k'_3)\end{aligned}$$

Note : $T_n = T_{n-1} + \Delta t$.

Notez que quelque soit l'intégrateur numérique choisi, si la force est nulle, il permettra de calculer un déplacement rectiligne uniforme (vitesse constante).